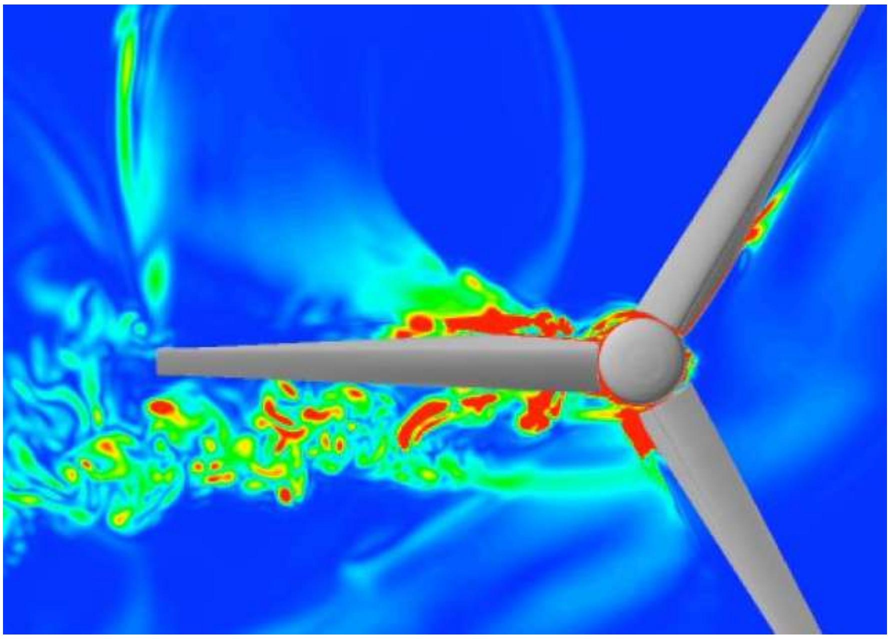


كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم القوى الميكانيكية

ميكانيك السوائل 2

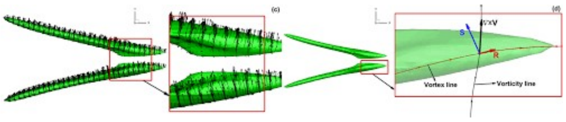
القوانين الاساسية للحركة الإعصارية

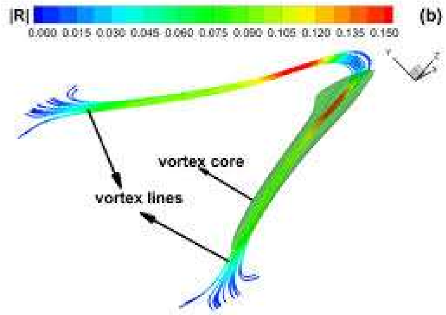
الدكتور المهندس
سعيد شقير

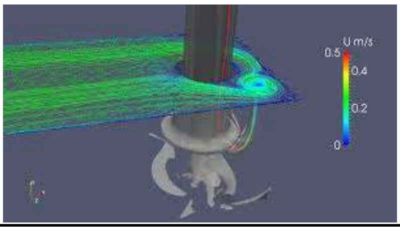
محتوى العرض

مقدمة

- سنقتصر هنا على حركة السوائل المثالية (عديمة الاحتكاك) ونعتبر حقل الجريان المستمر محددا في كل نقطة منه وفي كل لحظة بشعاع السرعة V , وانه يحقق شرط الخلو من الدوران باستثناء بعض **النقاط الشاذة Singular points** التي يكون فيها $rot\ \boldsymbol{V} \neq 0$.
- إن لمثل حقول الجريان هذه أهمية عملية عندما تنضم اليها حقول جريان عادية, حيث بنيت على هذا الأساس طرق حديثة, مثل **طريقة النقاط الشاذة**, لحساب أجسام الجريان المولدة لقوة الرفع Lift







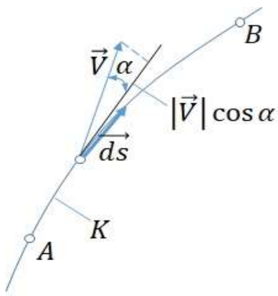
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

مفهوم الجولان "منحني مفتوح"

- من أجل الدراسة التفصيلية للحركة الاعصارية, ولإعطاء حكم عام فيما إذا كان منطقة كبيرة نسبيا من حقل الجريان تقوم بحركة دورانية أم لا , نستعين بمفهوم **الجولان Circulation**,
- ثبت أنه من أخصب المفاهيم التي يستخدمها ميكانيك السوائل الحديث .
- لتوضيحه يفضل ان نبدا ببعض التعاريف :
  - ✓ الخط السائلي أو السطح السائلي: بأنه المنحني أو السطح الذي يتشكل باستمرار من نفس الجزيئات السائلية, حتى وإن تحرك أو غير شكله.
  - ✓ ونعرف **التكامل الخطي Λ(Lambda)** على طول منحنٍ K يصل بين نقطتين A وB, : بأنه "الجريان" على طول K, ويساوي تكامل جداء مركبة السرعة المماسية على K في العنصر الخطي ds.
  - ✓ فاذا كانت α الزاوية المتشكلة بين V و ds ينتج مع اعتبار الزمن ثابت (أي في لحظة زمنية أنية):

$$\Lambda = \int_A^B V \cos\alpha \, ds = \int_A^B \boldsymbol{V} . \boldsymbol{ds}$$

أي أنه يمثل تكامل الجداء الداخلي لشعاع السرعة في شعاع العنصر الخطي.
وبالتالي فهو يمثل قيمة عددية, يمكن حسابها في حالة السوائل الحقيقية والمثالية.



تعريف التكامل الخطي لشعاع السرعة على طول المنحنى K

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

مفهوم الجولان "منحني مفتوح"

- إذا كان المنحني K متعامداً مع خط التيار، وبالتالي يمثل خطاً للكمون الثابت فتكون $\alpha = \frac{\pi}{2}$ وينتج $\Lambda = 0$.
- أما إذا كان K خطاً للتيار، فتكون $\alpha = 0$ و $\cos\alpha = 1$

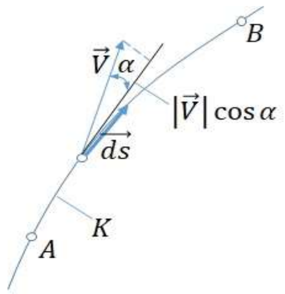
$$\Lambda = \int_A^B V\ ds$$

- في حالة الجريانات الثلاثية البعد يكون $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(u,v,w)$ و $\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{ds}(dx,dy,dz)$ وبالتالي تأخذ المعادلة السابقة بصيغة مركبات السرعة الشكل التالي:

$$\Lambda = \int_A^B (u\,dx + vdy + wdz)$$

- فإذا كان الجريان المعتبر كمونياً, أي يملك كمون سرعة Φ فإن تكامل العلاقة السابقة يصبح سهلا جدا إذ ينتج :

$$\Lambda = \int_A^B \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right) = \int_A^B d\Phi = \Phi_B - \Phi_A = \Delta\Phi_{B-A}$$

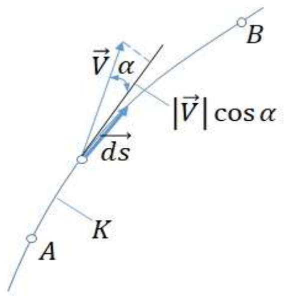


تعريف التكامل الخطي لشعاع السرعة على طول المنحني K

مفهوم الجولان "منحني مفتوح"

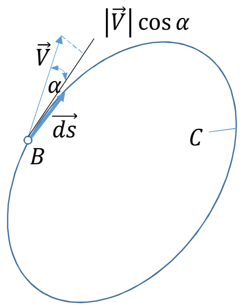
$$\Lambda = \int_A^B \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right) = \int_A^B d\Phi = \Phi_B - \Phi_A = \Delta\Phi_{B-A}$$

- وهذا يعني أنه في حالة الجريانات الكمونية يكون التكامل الخطي للسرعة على طول المنحنيK الواصل بين النقطتين Aو B مساويا للفرق بين قيمتي كمون السرعة في هاتين النقطتين.
- فإذا كان التابع Φ وحيد التعيين, أي أن له قيمة واحدة في كل نقطة من المجال المعتبر, فإن قيمة Λ لا تتعلق بشكل المنحني K, أي بالطريق الواصلة بين النقطتين Aو B .



تعريف التكامل الخطي لشعاع السرعة على طول المنحني K

مفهوم الجولان "منحني مغلق"



تعريف الجولان على طول المنحني C المغلق

- من مفهوم التكامل الخطي للسرعة نصل الى مفهوم **الجولان** Γ . ويعرف بأنه التكامل الخطي للسرعة على طول منحن مغلق C.
- مع إختيار اتجاه موجب للالتفاف يؤخذ عادة بعكس دوران عقارب الساعة

$$\Gamma = \oint_{(C)} V\cos\alpha\, ds = \oint_{(C)} \boldsymbol{V}.\boldsymbol{ds}$$

$$\Gamma = \oint_{(C)} (udx + vdy + wdz)$$

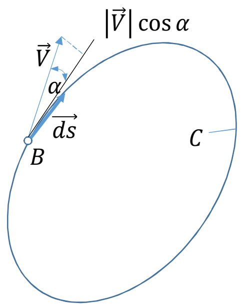
- ينتج من هذه العلاقة في حالة الجريانات الكمونية مع الانتباه :

$$\Gamma = \oint_{(C)} d\Phi = \Phi_{B\to A} - \Phi_A = \Delta\Phi(C)$$

حيث $\Delta\Phi(C)$ فرق الكمون عندما نلف المنحني C دورة كاملة وتعود B فتنطبق على النقطة A,

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

مفهوم الجولان "منحني مغلق"



تعريف الجولان على طول المنحني C المغلق

- فإذا كان التابع Φ وحيد التعيين فتكون قيمة الجولان بالنسبة لأي منحن مغلق تساوي الصفر.
- هذا يعني ان المنطقة المعتبرة من حقل الجريان تمثل **ساحة وحيدة الترابط**.
- أما اذا كانت تمثل **ساحة متعددة الترابط** بمفهوم " سطوح ريمان " Riemann, وكان التابع Φ متعدد القيم في نقطة معينة أو غير مستمر, بمعنى يقفز من قيمة لأخرى, فيكون للجولان قيمة تختلف عن الصفر

في ساحة وحيدة الترابط يسود في مجموعها جريان كموني فإن الجولان على طول أي منحن مغلق يساوي الصفر

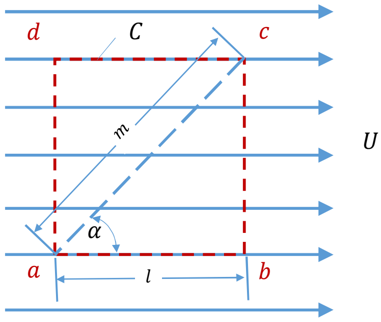
- بالنسبة لأي منحن مغلق أو خط تيار مغلق. وعليه نصل الى النتيجة الهامة التالية :

هذه النتيجة تبين بوضوح أن هناك علاقة مباشرة بين الدوران والجولان, الذي لا ينحصر تعريفه بالجريانات المثالية فقط . كما يتضح أيضاً أن هناك جريانات كمونية خالية من الجولان وأخرى لا ينعدم فيها الجولان.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

حساب الجولان- مثال أول

- حساب الجولان في جريان مثالي منتظم



- نعتبر أولا جريانا مثاليا منتظما موازيا للمحور x سرعته U. نختار المنحني المغلق adcba بشكل مستطيل ضلعان منه يوازيان خطوط التيار وطول كل منهما l, فتكون قيمة الجولان مساوية لمجموع التكامل الخطي على طول أضلاع المستطيل:

$$\Gamma = \sum \Lambda(ab) + \Lambda(bc) + \Lambda(cd) + \Lambda(da) = lU + 0 - lU + 0 => \Gamma = 0$$

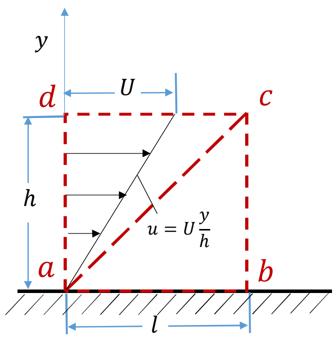
- نختار الآن المنحني المغلق المثلثي $acba$ ونجري التكامل الخطي للسرعة مع ملاحظة أن $\overline{ca} = m = l/\cos\alpha$. فينتج أيضا:

$$\Gamma = lU + 0 - m.U\cos\alpha => \Gamma = 0$$

- وعليه فانه في الجريان الانسحابي المنتظم ينعدم الجولان بالنسبة لأي منحن مغلق. وينتج ان تابع كمون السرعة لهذا الجريان وحيد التعيين.

حساب الجولان- مثال ثاني

- حساب الجولان في جريان حقيقي فوق صفيحة مستوية

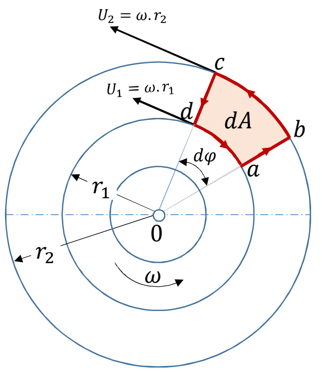


- نعتبر الجريان فوق صفيحة مستوية ونفرض أن السرعة تتغير خطياً من الصفر وحتى قيمة معينة U على بعد h من الصفيحة.
- اذا حسبنا الجولان على طول منحن مغلق بشكل مستطيل adcba نجد بسهولة أن

$$\Gamma = -lU \neq 0$$

- وتختلف قيمة Γ إذا اخترنا منحنيا مغلقا مثلثيا مثل acba
- وتتضح هذه النتيجة إذا تذكرنا أن مثالنا ليس إلا جريان كوئيت لسائل حقيقي, وبالتالي فهو دوراني.

حساب الجولان- مثال ثالث



- حساب الجولان في جريان سرعته تتناسب طردا مع نصف القطر (اعصار الجسم الصلب)

- نعتبر جريانا خطوط تياره حزمة من الدوائر المركزية حول المركز 0.
- نفرض أولا أن السرعة المحيطية $u = r\omega$ تتناسب طردا مع نصف القطر
- كما لو كان السائل ككل يدور كجسم صلب بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور يمر من 0 وعمودي على مستوٍ.
- نحسب الجولان بالنسبة للمنحني المغلق adcba المحدد بدائرتين نصفا قطريهما r_1 r_2, وبخطين قطريين يحصران الزاوية $d\varphi$
- فإذا لاحظنا ان السرعة باتجاه نصف القطر معدومة نجد بسهولة:

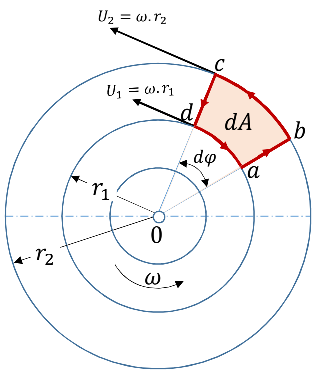
$$\Gamma = u_2 r_2 d\varphi - u_1 r_1 d\varphi = \omega({r_2}^2 - {r_1}^2)d\varphi$$

- فاذا حسبنا مساحة القطاع الدائري المحدد بالمنحني المغلق نجد:

$$dA = \int_{r_1}^{r_2} (r d\varphi)\, dr = ({r_2}^2 - {r_1}^2)\frac{d\varphi}{2}$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

حساب الجولان- مثال ثالث



- حساب الجولان في جريان سرعته تتناسب طردا مع نصف القطر (اعصار الجسم الصلب)

- وبالتالي يصبح الجولان:

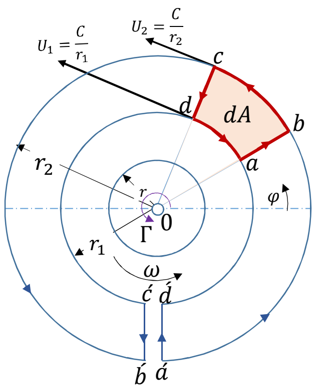
$$\Gamma = 2\omega dA$$

- هذه النتيجة يمكن تعميمها على كل قطاع دائري آخر, حتى لو كان متناهي الصغر.
- وبالتالي فإن الجولان يساوي الى ضعف قيمة جداء السرعة الزاوية الثابتة لكل جزيء سائل في السطح المحدد بالمنحني المغلق, وتتغير قيمته حسب اختيار هذا المنحني.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

حساب الجولان- مثال رابع

- حساب الجولان في جريان سرعته تتناسب عكسا مع نصف القطر (اعصار كموني)



- وحيث أن $0 \neq \omega \equiv \omega_z$ فتكون حسب المعادلة السابقة كافة جزيئات السائل تقوم فعلا بحركة دورانية بنفس السرعة الزاوية.
- يطلق على هذا الجريان اسم **إعصار الجسم الصلب أو الإعصار القسري**.
- نفرض الآن للمقارنة أن السرعة المحيطية تتناسب عكسا مع نصف القطر: $u = C/r$
- فإذا حسبنا الجولان على طول المنحني المغلق adcba, كما في الحالة السابقة , ينتج:

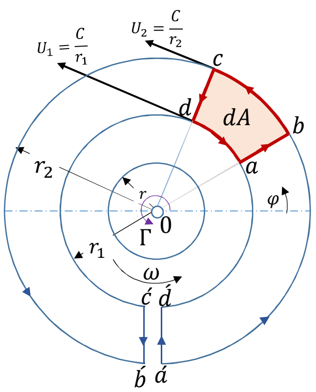
$$\Gamma = u_2 r_2 d\varphi - u_1 r_1 d\varphi = C - \acute{C}$$

- هذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لكل منحن مغلق آخر مثل $\acute{a}\acute{d}\acute{c}\acute{b}\acute{a}$ شريطة ان لا يحتوي المركز 0.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

حساب الجولان- مثال رابع

- حساب الجولان في جريان سرعته تتناسب عكسا مع نصف القطر (اعصار كموني)



- بالمقابل تنتج قيمة الجولان بالنسبة لأية دائرة نصف قطرها r حول 0(خط تيار):

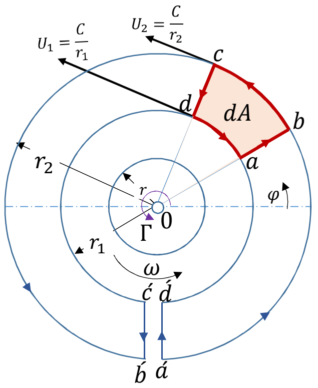
$$\Gamma = 2\pi r . u = 2\pi C = const$$

أي ان الجولان له قيمة ثابتة لا تتعلق بنصف القطر, ويتوضح بذلك المعنى الفيزيائي للثابت C.

- وعندما $r \to 0$ تصبح $u \to \infty$, وبالتالي فإن الجريان غير معقول فيزيائيا في المركز 0 الذي يمثل نقطة شاذة يوجد فيها إعصاركموني ,
- يمثل المحور z المار من 0 خيط إعصار لا نهائي الامتداد **شدته الإعصارية Vortex intensity** تساوي Γ.
- ويقال ان هذا الخيط الاعصاري يحرض حوله حقلا للسرعة, تيمنا بالحقل المغناطيسي الذي يحرضه سلك ناقل للتيار الكهربائي.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

حساب الجولان- مثال رابع



- حساب الجولان في جريان سرعته تتناسب عكسا مع نصف القطر (اعصار كموني)

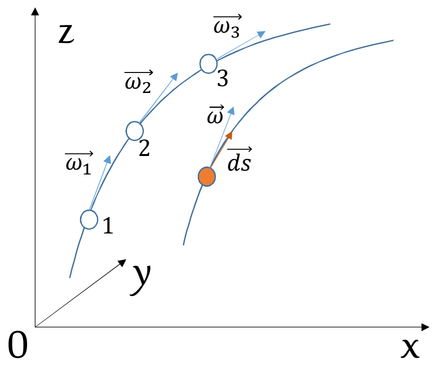
- والجدير بالانتباه هنا ان الجريان الكموني حول المركز يملك كمون سرعة $\Phi = C\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$
يحقق العلاقة السابقة وتنتج منه أن السرعة المماسية $u = \frac{\partial\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{r d\varphi} = \frac{C}{r}$
- فاذا حسبنا فرق الكمون بعد دورة كاملة على محيط دائرة ينتج:

$$\Delta\Phi = \Phi(\varphi + 2\pi) - \Phi(\varphi) = 2\pi C = \Gamma$$

- وبالتالي فان قيمة كمون السرعة تزداد بمقدار قيمة الجولان الثابت بعد كل دورة كاملة.
- هذا يعني أن التابع Φ متعددة القيم, وحقل الجريان يمثل رياضيا ساحة متعددة الترابط يسهل تصورها اذا اعتبرنا وجود نواة للاعصار حول المركز 0 ذات قطر محدود ومن مادة أخرى صلبة أو غازية تدور بسرعة زاوية معينة.

خط الإعصار وأنبوبة الإعصار

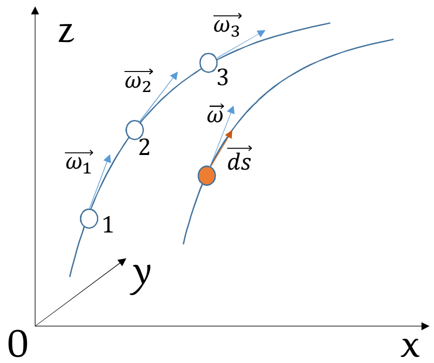
تعريف خط الاعصار واستخراج معادلته التفاضلية



- من الأنسب لتتبع تفاصيل الحركة الدورانية اعتبار حقل **شعاع الاعصار** $\boldsymbol{\omega}(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ والاستفادة من التماثل بينه وبين حقل شعاع السرعة $\boldsymbol{V}(u,v,w)$.
- فكما أن $\boldsymbol{V}$ يمثل سرعة جزيء سائلي في مكان معين وزمن معين, كذلك يمثل $\boldsymbol{\omega}$ دوران الجزيء في نقطة معينة وزمن معين .
- وتحسب القيمة المطلقة للشعاعين من علاقتين متماثلتين
- للحصول على تصور هندسي عن الحقل الشعاعي $\boldsymbol{\omega}$ ندخل مفهوم خط الإعصار *Vortex line* مماثلا لمفهوم خط التيار ونعرفه بالمنحني السائل الذي يكون المماس عليه في لحظة زمنية معينة منطبقا في كل نقطة منه على شعاع السرعة الزاوية

خط الإعصار وأنبوبة الإعصار

تعريف خط الاعصار واستخراج معادلته التفاضلية



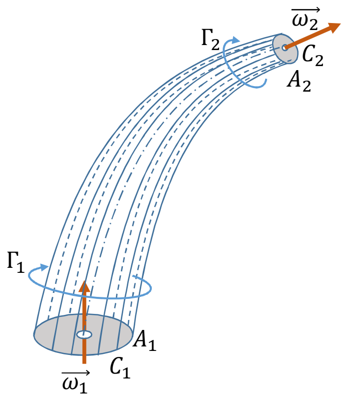
- لقد تبين أنه من الأنسب لتتبع تفاصيل الحركة الدورانية اعتبار حقل **شعاع الاعصار** $\boldsymbol{\omega}(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ والاستفادة من التماثل بينه وبين حقل شعاع السرعة $\boldsymbol{V}(u,v,w)$.
- فكما أن $\boldsymbol{V}$ يمثل سرعة جزيء سائلي في مكان معين وزمن معين, كذلك يمثل $\boldsymbol{\omega}$ دوران الجزيء في نقطة معينة وزمن معين .
- وتحسب القيمة المطلقة للشعاعين من علاقتين متماثلتين
- للحصول على تصور هندسي عن الحقل الشعاعي $\boldsymbol{\omega}$ ندخل مفهوم خط الإعصار *Vortex line* مماثلا لمفهوم خط التيار ونعرفه بالمنحني السائلي الذي يكون المماس عليه في لحظة زمنية معينة منطبقا في كل نقطة منه على شعاع السرعة الزاوية
- وتنتج معادلته التفاضلية :

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{ds} = 0 \qquad \rightarrow \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

يتضح من هذا أن الصفات الهندسية لخط الاعصار تشبه تماما تلك التي يتصف بها خط التيار . ولكن الصفة الاساسية للأول هي أنه , حتى ولو تحرك أو غير شكله, يبقى مكونا من نفس الجزيئات السائلة.

خط الإعصار وأنبوبة الإعصار

إنبوبة إعصار

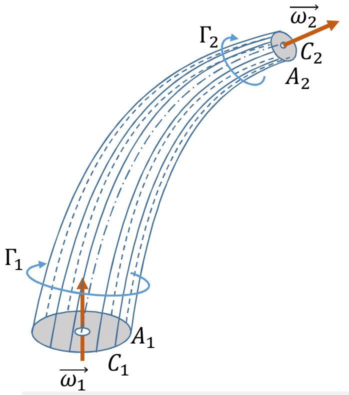


- من مفهوم خط الإعصار نصل الآن بسهولة لمفهوم أنبوبة الإعصار Vortex tube.
- إذا أخذنا في حقل إعصاري مستمر, أي خال من الفجوات, منحنياً مغلقاً صغيراً C_1 فإن مجموع الاعصار المارة من نقاط هذا المنحني تشكل سطحاً أنبوبيا يطلق عليه أنبوبة الإعصار,
- يطلق على السائل الذي تحتويه خيط الاعصار Vortex filament.
- ويقودنا التفكير على هذا المنوال للتساؤل فيما إذا كان لشرط الاستمرار ولغزارة التدفق الحجمي (التيار الحجمي) بالنسبة لأنبوبة التيار ما يماثلهما بالنسبة لإنبوبة الاعصار.
- تكون الإجابة سهلة إذا اشتقينا مركبات شعاع الاعصار ω_x , ω_y, ω_z جزئياً وعلى التوالي بالنسبة ل x, y, z وأخذنا المجموع لوجدنا:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = div\ \boldsymbol{\omega} = 0$$

هذه العلاقة تشبه تماما معادلة الاستمرار لجريان غير قابل للانضغاط.

خط الإعصار وأنبوبة الإعصار



إنبوبة إعصار

- فاذا لاحظنا ان $2\omega = rot\ \boldsymbol{V}$ تأخذ العلاقة الأخيرة الصياغة الشعاعية:

$$div\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{V}) = div\ (2\boldsymbol{\omega}) = 0$$

- غزارة التدفق الإعصار أو شدة الاعصار لأنبوبة اعصار صغيرة المقطع بحيث يمكن اعتبار شعاع السرعة الزاوية موزعا عليه بانتظام تساوي الى ضعف جداء السرعة الزاوية في مساحة المقطع الناظمي على محور الأنبوبة, وتبقى قيمتها ثابتة على طول الأنبوبة أي :

$$Q_\omega = 2\omega_1 A_1 = 2\omega_2 A_2 = 2\ \omega\ A = const;\ \boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{A}$$

- وتنتج شدة الاعصار بالنسبة لأي سطح اعتباطي يشكل الناظم عليه مع الشعاع $\boldsymbol{\omega}$ زاوية α بالتماثل مع العلاقة :

$$Q_\omega = 2\ \omega\ A \cos\alpha = 2\ \omega\ A_n = 2\ \omega_n A = 2\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{A}$$

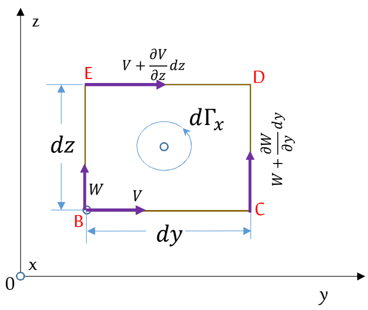
حيث $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n}_e A$ الشعاع السطحي , $\boldsymbol{n}_e$ شعاع واحدة الناظم عليه.

- إن شرط الاستمرار هذا يقضي, كما كان الأمر بالنسبة لخطوط التيار في حقل السرعة لجريان غير قابل للانضغاط, بأن خطوط الإعصار في داخل السائل لا يمكن ان تكون لها بداية أو نهاية .
- لكن يمكن ان تكون منحنيات مغلقة , أو أن تنتهي عند حدود الجملة الفيزيائية المفتوحة, مثل السطوح المحدة أو الحرة للسائل.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

العلاقة بين الجولان والدوران- قانون ستوكس التكاملي

حساب الجولان حول محيط جزيء سطحي مستطيل لاستخراج العلاقة بين الجولان والدوران



- نفرض ان حقل شعاع الاعصار ω للجريان المعتبر مستمراً, أي أن كل جزيء سائلي فيه يملك سرعة زاوية.
- وللسهولة نعتبر أولا جزيئا سطحيا بشكل مستطيل B C D E أبعاده dy, dz, كأن يكون مقتطعا من جريان مستو مواز للمستوي zy انظر الشكل:
- إن الجولان على طول الخط المغلق BEDCB المحد للجزيء السطحي ينتج كمجكوع للتكامل الخطي للسرعة على طول أضلاع المستطيل :

$$d\Gamma_x = \Lambda(BC) + \Lambda(CD) + \Lambda(DE) + \Lambda(EB)$$

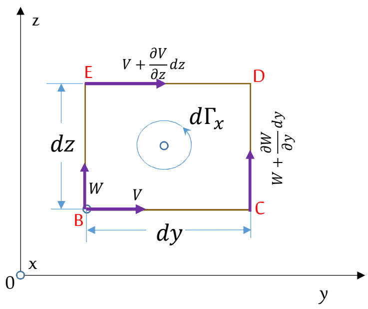
- نفرض أن v, w مركبتا السرعة في النقطة B., فتكون مركبة السرعة على طول الضلع DC هي $w + \frac{\partial w}{\partial y}dy$ وعلى طول الضلع DE هي $v + \frac{\partial v}{\partial z}dz$ وينتج بالتالي:

$$d\Gamma = vdy + \left(w + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right)dz - \left(v + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)dy - wdz$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

العلاقة بين الجولان والدوران- قانون ستوكس التكاملي

حساب الجولان حول محيط جزيء سطحي مستطيل لاستخراج العلاقة بين الجولان والدوران



- وبعد الاصلاح والانتباه أن مساحة الجزيء السطحي $dA_x = dydz$, حيث الدليل x يشير الى أن الجزيء السطحي متعامد مع المحور x , نجد:

$$d\Gamma_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dA_x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x$$

- وبالتالي تصبح العلاقة السابقة:

$$d\Gamma_x = 2\omega_x dA_x$$

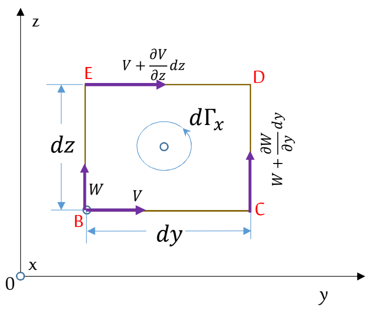
- بنفس الطريقة نحصل على علاقتين مشابهتين بالنسبة لجزيء سطحي في المستويين zx و yx المتعامدين مع y وz:

$$d\Gamma_y = 2\omega_y dA_y$$

$$d\Gamma_z = 2\omega_z dA_z$$

العلاقة بين الجولان والدوران- قانون ستوكس التكاملي

حساب الجولان حول محيط جزيء سطحي مستطيل لاستخراج العلاقة بين الجولان والدوران



- هذه النتيجة يمكن تعميمها على أي جزيء سطحي مستوٍ dA يصنع الناظم عليه $\boldsymbol{n}$ مع شعاع السرعة الزاوية ω زاوية α حيث ينتج الجولان على طول محيط هذا الجزيء:

$$d\Gamma = 2\omega_n dA = 2\omega dA_n = 2\omega dA\cos\alpha = 2\boldsymbol{\omega}.\,d\boldsymbol{A}$$

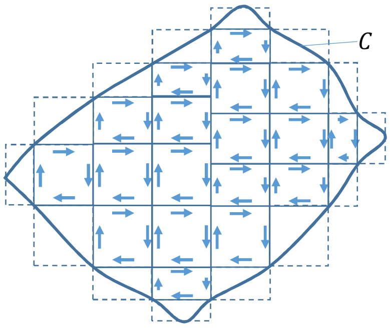
- اذا تذكرنا ان الطرف الايمن من العلاقات الاخيرة يمثل شدة الاعصار وأن السرعة الزاوية تعبر عن دوران الجزيء فنكون قد توصلنا الى العلاقة بين الجولان والدوران بالنسبة لجزيء سطحي مستوٍ صغير

الجولان حول محيط جزيء سطحي مستوٍ صغير (مستطيل مثلاً) يساوي شدة الاعصار الذي يخترق هذا الجزيء السطحي: $Q_\omega \equiv \Gamma$

- هذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لأي سطح مستوٍ A ذي شكل إعتباطي وبحده المنحني C

العلاقة بين الجولان والدوران- قانون ستوكس التكاملي

حساب الجولان حول على طول منحن مغلق C يحد سطحا مستويا اعتباطي الشكل



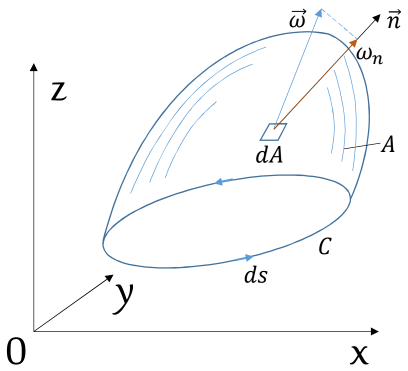
- اذاذا قسمنا هذا السطح بمجموعة محددة من المستقيمات الشاقولية والأفقية الى عدد كبير n من المستطيلات الصغيرة , فإن أضلاعها الخارجية المتلاقية مع المنحني C تشكل متعدد أضلاع عدد أضلاعه m.
- فاذا لاحظنا عند حساب الجولان حول محيط المستطيلات الصغيرة الداخلية, كتكامل خطي للسرعة على طول أضلاعها, أن كل ضلع تابع لمستطيلين متجاورين يتم الالتفاف حوله باتجاهين متعاكسين, فان التكامل الخطي لكافة الاضلاع الداخلية للمستطيلات ينعدم وتبقى قيمة الجولان مساوية لمجموع التكاملات الخطية على طول الأضلاع الخارجية للمستطيلات أي حول محيط الاضلاع.
- فاذا جعلنا عدد المستطيلات $n \to \infty$ فإن $m \to \infty$ أيضا ويأخذ متعدد الاضلاع شكل المنحني C وبالتالي ينتج من بالتكامل :

$$\Gamma = 2 \iint_{(A)} \omega_n dA$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

العلاقة بين الجولان والدوران- قانون ستوكس التكاملي

حساب الجولان على طول منحن مغلق فراغي واستخراج قانون ستوكس التكاملي



- لنعالج الآن الحالة العامة فنعتبر سطحاً فراغياً إعتباطيا A يرتكز على منحن مغلق C بدون تعليق, الشكل
- ليكن dA جزئيا سطحيا صغيرا من A, وبالتالي يمكن اعتباره مستويا تنطبق عليه العلاقة السابقة.
- نفرض ان الناظم **n** على dAيصنع مع محاور الاحداثيات الديكارتية x, y, z الزوايا α,β,γ , فتكون:

$$dA_x = dA\cos\alpha$$
$$dA_y = dA\cos\beta$$
$$dA_z = dA\cos\gamma$$

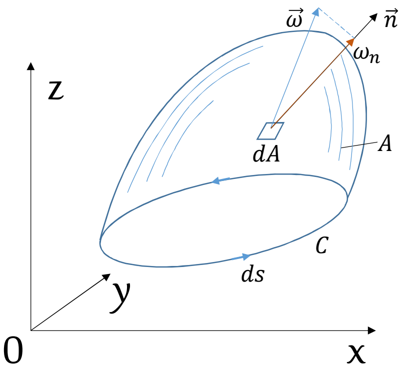
- مساقط dA على المستويات المتعامدة مع x, y, z على التوالي.
- وينتج الجولان بالنسبة للسطح dA كمجموع للجولانات حول مساقطه.
- وبالتالي وباستخدام علاقات الجداء الشعاعي العددي :

$$d\Gamma = d\Gamma_x + d\Gamma_y + d\Gamma_z == 2(\omega_x dA_x + \omega_y dA_y + \omega_z dA_z)$$
$$= 2(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \cos\beta + \omega_z \cos\gamma)dA = 2\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\omega}.d\boldsymbol{A}$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

العلاقة بين الجولان والدوران- قانون ستوكس التكاملي

حساب الجولان على طول منحن مغلق فراغي واستخراج قانون ستوكس التكاملي



- اذا أدخلنا: $2\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{V}$, والجولان, ينتج بتكامل العلاقة السابقة:

$$\Gamma = \oint_{(c)} \boldsymbol{V}.\boldsymbol{ds} = \iint_{(A)} rot\ \boldsymbol{V}.\boldsymbol{dA} = 2\iint_{(A)} \boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{dA}$$

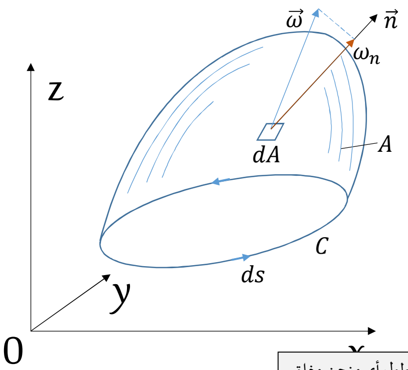
- هـذا هـو **قـانون سـتوكس التكاملي** المعـروف في نظريـة الحقـل كقـانون تكـاملي لإرجـاع التكـامل السطحي الى تكامل خطي. ويعبر هنا عن العلاقة العامة بين الجولان والدوران :

> التكامل السطحي لدوار شعاع السرعة بالنسبة لجريان ثلاثي البعد ضمن سطح فراغي اعتباطي الشكل يساوي ضعف التكامل السطحي لشعاع السرعة الزاوية, أي مجموع شدة الاعصارات التي تخترق هذا السطح, وبالتالي يساوي قيمة الجولان على طول المنحني الذي يرتكز عليه السطح

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

العلاقة بين الجولان والدوران- قانون ستوكس التكاملي

حساب الجولان على طول منحن مغلق فراغي واستخراج قانون ستوكس التكاملي



- اذا عبرنا عن هذا القانون بمركبات شعاع السرعة

$$\Gamma = \oint_{(c)} (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

$$= \iint_{(A)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy\right]$$

- من هذا القانون نستنتج بسهولة أنه في حالة الجريانات اللادورانية (الكمونية) أي عندما $\omega = 0$ يكون الجولان $\Gamma = 0$.
- وعليه يمكن أيضا صياغة شرط الخلو من الجوران كالتالي

> شرط الخلو من الدوران لحقل جريان وحيد الترابط يقضي بأن يكون الجولان على طول أي منحنٍ مغلق (لا يتقاطع مع نفسه) معدوماً:
>
> $$\Gamma = \oint_{(c)} \boldsymbol{V}.\boldsymbol{ds} = \oint_{(c)} \boldsymbol{grad}\,\Phi.\boldsymbol{ds} = \oint_{(c)} d\Phi = 0$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

قانون طومسون عن ثبات الجولان مع الزمن

- نعتبر جريانا لسائل عديم الإحتكاك ومتجانس, بمعنى أن الكثافة إما أن تكون:
  - ✓ ثابتة (سائل غير قابل للانضغاط)
  - ✓ أو تتعلق بالضغط فقط (سائل باروتروبي Barotropic) .
- نفرض أيضا ان القوى الحجمية (الكتلية) المؤثرة على السائل من النوع المخزن للقدرة, وبالتالي يمكن اشتقاقها جزئيا من كمون قوى Φ_S .
- على اساس هذه الفرضيات استطاع وليم طومسون أن يبرهن علاقة هامة عن ثبات الجولان مع الزمن معروفة باسم قانون طومسون :

في سائل عديم الاحتكاك ومتجانس يؤثر عليه حقل قوى حجمية كموني يكون الجولان على طول أي منحن سائلي مغلق ثابتاً مع الزمن $\Gamma(t) = \text{const}$

- بما أن الخط السائلي تعريفا يجب أن يكون مؤلفا من نفس الجزيئات السائلية فان قانون طومسون يقضي بأن يكون التفاضل المادي للجولان بالنسبة للزمن معدوماً, أي

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint \boldsymbol{V}.d\boldsymbol{s} = 0$$

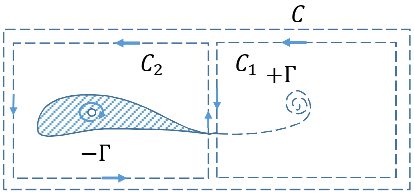
قانون طومسون عن ثبات الجولان مع الزمن

- إن قانون طومسون يسمح باستخلاص عدة استنتاجات هامة:

1. فإذا كان السائل قبل بدء الحركة في حالة سكون (V=0) فيكون الجولان بالنسبة لأي خط سائلي مغلق بالتأكيد مساوياً الصفر. ويبقى إذن معدوما بالنسبة لكافة جزيئات السائل التي تبدأ حركتها من السكون. وهذا يعني حسب قانون ستوكس أن كل جريان عديم الاحتكاك يبدأ حركته من السكون هو جريان كموني خال من الاعاصير.
2. ولكن يجب الا يفهم من هذا أنه لا يمكن أن تتكون أعاصير في مثل هذه الجريانات . إلا أن تكونها مرهون دائما بوجود سطوح فاصلة أو كما تسمى أيضا سطوح عدم استمرارية Discontinuity surface يتم عبرها تغير مفاجيء للسرعة والضغط وتتصف بعدم استقررها. هذه السطوح تنشأ بعد بدء الحركة وبالتالي لا ينطبق عليها قانون طومسون.
3. ولكنه يبقى صحيحا بالنسبة لأي خط سائلي مغلق يضم في داخله مثل هذه السطوح الفاصلة, ويلزم عندها ان يكون الجولان الكلي للاعاصير المتشكلة في المجال المغلق معدوما. لهذا لا تظهر عادة أعاصير إفرادية وإنما أزواج أعاصير.

قانون طومسون عن ثبات الجولان مع الزمن

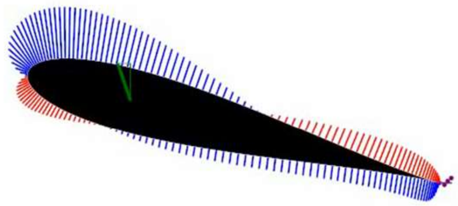
- لنوضح هذه النتيجة الهامة على مثال بدء الحركة لجناح حامل في سائل ساكن, الشكل التالي .
- إن الجولان حول الخط السائلي المغلق C الذي يضم الجناح وهو في حالة السكون (أو أي خط آخر) يساوي الصفر.
- بعد بدء الحركة ينشأ عند مؤخرة الجسم الحادة سطح فاصل نتيجة تلاقي التيار العلوي والسفلي للسائل بسرعتين مختلفتين عادة. هذا السطح الفاصل يتفكك بعد لحظة قصيرة الى ما يسمى اعصار بدء الحركة
- فاذا اعتبرنا الخط المغلق C_1 الذي يضم هذا الاعصار تنتج لدينا قيمة للجولان $+\Gamma \neq 0$.
- واذا حسبنا الجولان على طول الخط المغلق C_2 الذي يحيط بالنجاح الحامل نجد أنه من حيث القيمة يساوي شدة إعصار بدء الحركة ولكنه مخالف له بالاشارة .



يتشكل الجولان حول جناح حامل يبدأ حركته من السكون نتيجة ظهور إعصار بدء الحركة

وعليه يكون الجولان بالنسبة لمجموع الخطين المغلقين C_2, C_1 معدوماً. وهذا يؤكد أن نشوء الجولان حول جناح حامل يبدأ حركته من السكون لا يتناقض مع قانون طومسون.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

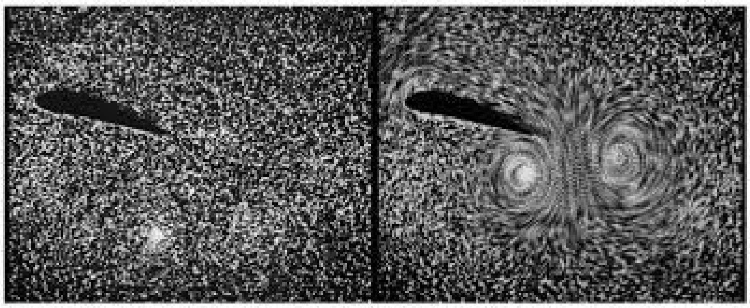


قانون طومسون عن ثبات الجولان مع الزمن

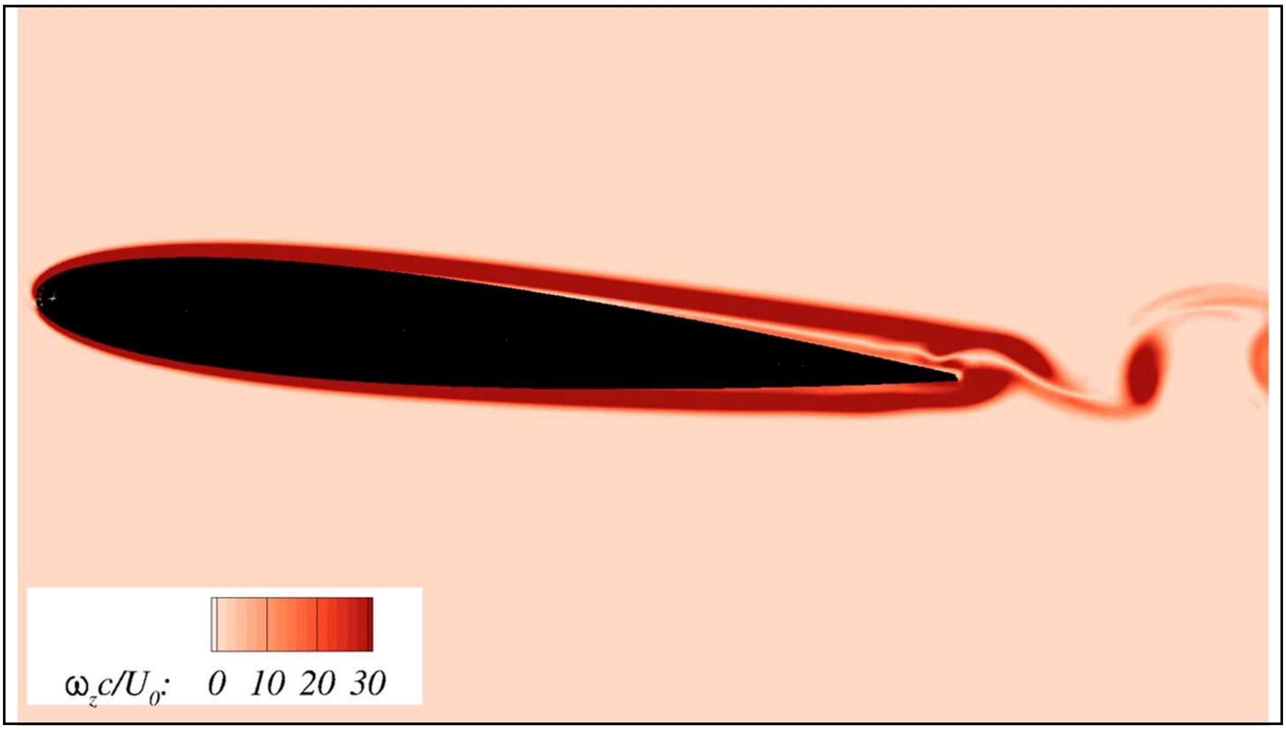
- التجربة تؤكد بوضوح صحة النتائج السابقة. فبالإمكان بوسائل ترئية الجريان تصوير أعاصير بدء الحركة.
- يبين الشكل بالنسبة لاسطوانة دائرية. كما يمكن أيضاً رؤية الاعصار الجولاني حول الجناح الحامل إذا أوقف فجأة بعد لحظة من بدء الحركة, حيث يتشكل ما يسمى اعصار التوقف
- الجدير بالانتباه أن قانون طومسون, وفقا للفرضيات التي اشتق على أساسها, لا ينطبق في حالة الجريانات الحقيقية. كما لا ينطبق في حالة السوائل غير المتجانسة,
- ولكن طريقة التحليل السابقة تسمح بحساب التغير الزمني للجولان بالنسبة لكتلة هواء مثلا ارتفعت فيها درجة الحرارة بشكل غير متساوٍ, نتيجة تسخين موضعي.

تكوّن إعصار بدء الحركة لاسطوانة دائرية عند الاقلاع من السكون

قانون طومسون عن ثبات الجولان مع الزمن



بعد الاقلاع بفترة قصيرة أوقف الجناح الحامل. الاعصار الجولاني (اعصار التوقف)
بعد انفصاله عن الجناح يسبح مع اعصار بدء الحركة



قوانين هلمهولتس للحركة الإعصارية

لقد استخرج هلمهولتس في دراسته المشهورة الآنفة الذكر القوانين الاساسية للحركة الاعصارية في السوائل المثالية المتجانسة (الباروتروبية) الخاضعة لحقل قوى حجمية كموني وصاغها بالشكل التالي:

القانون الأول : لا يمكن ان يكون جزيء سائلي في حالة دوران إذا لم يكن في هذه الحالة منذ بدء الحركة.

كل جريان عديم الاحتكاك يبدأ حركته من السكون هو جريان لا دوراني

القانون الثاني : كل جزيء سائلي يكون في لحظة ما تابعا لخط إعصار فإنه يبقى كذلك عندما يتحرك خط الاعصار أو يغير شكله

أنبوبة الاعصار تبقى باستمرار انبوبة إعصار, أي انها لا تتفكك (طبعا في السوائل الحقيقية لا ينطبق ذلك !)

القانون الثالث : غزارة التدفق الاعصاري تبقى ثابتة على طول انبوبة الاعصار وتحافظ على قيمتها أثناء حركة الانبوبة.

أن كل خط مغلق يحيط بالأنبوبة الاعصارية يمكن إزاحته على طول هذه الانبوبة دون ان يتغير الجولان حوله. ولهذا لا يمكن ان يكون لخيط الإعصار بداية أو نهاية , وإنما يجب أن ينتهي إما على الجدار أو على السطح الحر للسائل,

وإما أن يشكل خيطا إعصاريا خاتميا نلاحظه أحيانا عند بعض المدخنين البارعين, حيث يلوّن الدخان جزيئات الهواء التي تقوم بحركة دورانية. وكون هذه الحلقة الإعصارية تتفكك بعد فترة يعود لتأثير الاحتكاك.

تجدر الاشارة الى ان هلمهولتس قد اشتق هذه القوانين على أساس التماثل بين الحقل الكهراطيسي وحقل الجريان

قوانين هلمهولتس للحركة الإعصارية

- إن قانون هلمهولتس الثالث يجد تطبيقا عمليا هاما في نظرية الجناح الحامل المحدود الإمتداد التي وضعها براندل.
- إن الجناح الحامل يعوض عنه بخيط إعصاري يسمى **الإعصار المربوط Fixed Vortex** بينما تكون خطوط الاعصار المنبعثة من نهايتيه ما يمسى **الاعصاران الحران Free Vortex**.
- وهذان يشكلان مع الإعصار المربوط وإعصار بدء الحركة بعيداً خلف الجناح الحامل ما يسمى **اعصار حدوة الحصان المغلق**.,
- هذا القانون يجد أيضا تطبيقا هامل في بناء الأقنية الهوائية والمائية للقياسات الايروديناميكية والهيدروديناميكية, حيث يطلب أن يكون الجريان في حجرة القياس منتظما وخاليا من الدوران قدر الإمكان. ويتم تحقيق ذلك بوضع ما يسمى **مقوم التيار** في مدخل النفاثة المتصلة بحجرة القياس. وهو يتألف من صفائح متصالبة أو ما يشابهها تكوّن أقنية متوازية صغيرة المقطع (أبسطها يشبه شبك الغربال!). فإذا وجدت كتلة هوائية في حالة دوران حول محور مواز لاتجاه الجريان, فان سرعتها الزاوية تزداد بمعدل n مرة إذا صغر المقطع بنسبة 1/n, لأن الشدة الإعصارية $\Gamma = 2\omega A$ تبقى ثابتة . وبإعتبار ان القطر عرضانيا على خط التيار ينقص بنسبة $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ينتج من ذلك زيادة السرعة العرضانية (المشوشة!) $r\omega$ بنسبة $\sqrt{n}$ بينما تزداد السرعة في اتجاه التيار بنسبة *n*.
- كل خيط إعصاري يولد في جواره المباشر سرعة إضافية يطلق عليها السرعة المحرضة, وتلعب دورا هاما في نظرية قوة الرفع *Lift* المؤثرة على جناح حامل أو ريشة آلة جريان

قانون بيو-سافار لحساب حقل السرعة المحرضة

- نعتبر سائلا عديم الاحتكاك تخترق بعض مناطقه خيوط إعصارية إفرادية . فتكون جزيئات السائل التابعة لهذه الخيوط فقط في حالة دوران , $\omega \neq 0$, بينما يكون باقي حقل الجريان لا دورانياً(خالي من الأعاصير).
- لندرس التأثير الذي يحدثه وجود خيط اعصاري ذي شكل غير محدد على محيطه المجاور, ونسأل بالضبط عن العلاقة بين الشدة الإعصارية (الجولان) لهذا الخيط وحقل السرعة المحرضة منه.

إن الإجابة على هذا السؤال, التي أعطاها لأول مرة هلمهولتس وستوكس , تسهل إذا اعتمدنا على التماثل بين الحقل الالكتروديناميكي والهيدروديناميكي, الذي سبقت الاشارة اليه, وبصورة خاصة تماثل القيم التالية لكل من الحقلين :

الحقل الالكتروديناميكي		الحقل الهيدروديناميكي
السلك الناقل للكهرباء	يماثل	الخط الاعصاري
شدة التيار I_e	تماثل	الجولان Γ
شدة الحقل المغناطيسي المحرض $\boldsymbol{H}_m$	تماثل	السرعة المحرضة $\boldsymbol{V}$
$I_e = \oint \boldsymbol{H}_m \, . \boldsymbol{ds} = \oint H_m \cos\alpha \, ds$	تماثل	$\Gamma = \oint \boldsymbol{V} \, . \boldsymbol{ds} = \oint V \cos\alpha \, ds$

قانون بيو-سافار لحساب حقل السرعة المحرضة

- وكما أنه لا يوجد سلك ناقل للكهرباء إلا اذا كان ضمن دارة مغلقة أو لا نهائي الامتداد, كذلك لا توجد سوى خطوط اعصارية غير محدودة أو مغلقة. والجدير بالذكر ان التماثل الالكترودايناميكي يعتبر الاساس لعدد من طرق ميكانيك السوائل المطبقة في حل العديد من سائل الجريان العملية المختلفة.
- إن العلاقة بين شدة التيار الكهربائي في سلك ناقل وبين الحقل المغناطيسي المحرض حوله معروفة في أسس الكهرباء بإسم **بيو–سافار** نسبة للعالمين J.B.Biot وSavart. و طبيعي على أساس ما تقدم أن يستخدم نفس هذا القانون لحساب السرعة المحرضة من خيط إعصاري.

قانون بيو-سافار لحساب حقل السرعة المحرضة

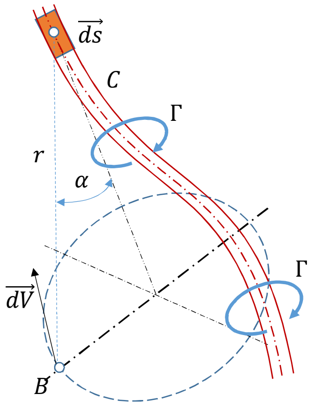
- نأخذ الحالة البسيطة جدا لسلك ناقل مستقيم لا نهائي الامتداد يمر فيه تيار شدته ثابتة I_c . فاذا اعتبرنا دائرة نصف قطرها r يخترقها السلك عموديا في مركزها, فتكون شدة الحقل المغناطيسي H_m على طول محيط هذه الدائرة ثابتة وكذلك $cos\alpha = 1$

$$\mathrm{I_e} = 2\pi r \mathrm{H_m} \qquad \rightarrow \mathrm{H_m} = \frac{\mathrm{I_e}}{2\pi r}$$

- هذه العلاقة تماثل العلاقة التي حصلنا عليها بالنسبة لخيط إعصاري مستقيم يخترق مستوي عموديا في المركز. فاذا اعتبرنا السرعة المحيطية $V \equiv u$ السرعة المحرضة ينتج :

$$\Gamma = 2\pi r V \qquad \rightarrow V = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

قانون بيو-سافار لحساب حقل السرعة المحرضة



استخراج قانون بيو سافار لحساب
السرعة المحرضة من خيط اعصاري

- نعتبر الآن خيطا إعصاريا C شكله بدون تحديد وشدتع الاعصارية Γ, ليكن ds عنصرا خطيا منه, ولتكن B نقطة ما تبعد عن ds مسافة r, α الزاوية التي يصنعها محور ds مع نصف القطر r .
- إن السرعة الجزئية التي يحرضها ds في النقطة B تتحدد حسب قانون بيو-سافار بالعلاقة :

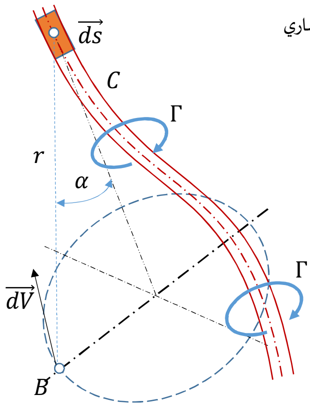
$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin\alpha \, ds$$

dVتكون متعامدة مع المستوى المتشكل من r و ds.

- وبمكاملة هذه العلاقة نحصل على السرعة المحرضة من تكامل خط إعصاري مستو:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{(C)} \frac{\sin\alpha}{r^2} ds = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\sin\alpha}{r^2} ds$$

قانون بيو-سافار لحساب حقل السرعة المحرضة



استخراج قانون بيو سافار لحساب
السرعة المحرضة من خيط اعصاري

- حيث يجب ان يكون خط التكامل إما مغلقا أو ممتدا الى اللانهاية. وفي الحالة العامة التي يكون فيها الخيط العصاري يمثل منحنيا فراغيا فيفضل ان تكتب العلاقة السابقة بشكل شعاعي .
- فاذا وضعنا بموجب علاقات الجداء الشعاعي $r \sin\alpha \, ds = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{ds}|$ نجد السرعة المحرضة:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{ds}}{r^3}$$

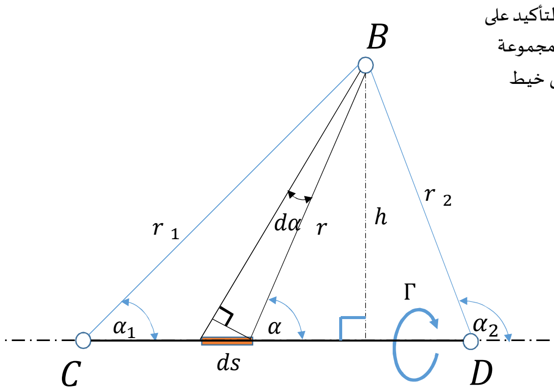
حيث $\boldsymbol{r}$ يمثل شعاع نصف القطر المكاني بين $\boldsymbol{ds}$ والنقطة المعتبرة B. أو بشكل مركبات باتجاه محاور الاحداثيات الديكارتية x, y ,z:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\Gamma}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{(y-\acute{y})d\acute{z} - (z-\acute{z})d\acute{y}}{[(x-\acute{x})^2 + (y-\acute{y})^2 + (z-\acute{z})^2]^{3/2}} \\ v = \dfrac{\Gamma}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{(z-\acute{z})d\acute{x} - (x-\acute{x})d\acute{z}}{[(x-\acute{x})^2 + (y-\acute{y})^2 + (z-\acute{z})^2]^{3/2}} \\ z = \dfrac{\Gamma}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{(x-\acute{x})d\acute{y} - (y-\acute{y})d\acute{x}}{[(x-\acute{x})^2 + (y-\acute{y})^2 + (z-\acute{z})^2]^{3/2}} \end{cases}$$

حيث $\acute{x}$, $\acute{y}$, $\acute{z}$ إحداثيات النقطة المتحولة , x,y,z إحداثيات النقطة الثابتة التي يراد حساب السرعة المحرضة فيها.

قانون بيو-سافار لحساب حقل السرعة المحرضة

- بالرغم من انه لا توجد في الحقيقة خيوط إعصارية محدودة الطول, كما سبق التأكيد على ذلك مراراً, إلا أنه إنطلاقا من التصور أن كل خط مغلق يمكن اعتباره مؤلفا من مجموعة قطع مستقيمة, نريد الآن أن نحسب السرعة التي تحرضها قطعة طولها $\overline{DC}$ من خيط إعصاري مستقيم في النقطة الثابتة B.



استخراج قانون بيو سافار لحساب السرعة المحرضة ممن خيط اعصاري

وظيفة + الاسئلة

ص248-249-250

نهاية المحاضرة

أسئلة؟